Опр. 1 Пусть функция f определена в $B_\delta(c)$ для нек-рого $\delta > 0$.
f имеет в точке c локальный максимум (минимум), если $f(x) \le f(c)$ ($f(x) \ge f(c)$) $\forall x \in B_\delta(c)$. Такие точки наз-ся точками локального экстремума.

f имеет в точке c строгий локальный максимум (минимум), если $f(x) < f(c)$ ($f(x) > f(c)$) $\forall x \in \mathring{B}_\delta(c)$.

Примеры: 1) $f(x) = \cos x$. $x = 0$ – точка лок. max; $f'(0) = \sin x|_{x=0} = 0$.
2) $f(x) = |x|$. $f'(0)$ не $\exists$; при этом $x = 0$ – точка лок. min.
3) $f(x) = x^3$. $f'(0) = 0$, при этом f возр-т в точке 0.

Т.1 (Ферма; необходимое усл-е экстремума)
Пусть f определена в окр-ти точки c и диф-ма в точке c. Если c – точка локального экстремума, то $f'(c) = 0$.

Т.2 (1-е достаточное условие экстремума)
Пусть f диф-ма в $\mathring{B}_\delta(c)$, и пусть f непр-на в т.с.
1) Если $f'(x) < 0$ $\forall x \in (c-\delta; c)$ и $f'(x) > 0$ $\forall x \in (c; c+\delta)$, то c – точка строгого локального минимума.
2) Если $f'(x) > 0$ $\forall x \in (c-\delta; c)$ и $f'(x) < 0$ $\forall x \in (c; c+\delta)$, то c – т. строгого лок. максимума.
3) Если f' имеет один и тот же знак на $(c-\delta; c)$ и $(c; c+\delta)$, то экстремума в точке c нет.

Замеч-е: Если $\exists f'(c)$, и f' меняет знак при переходе через т. c, то $f'(c) = 0$ (Т.1)

Д-во: 1) Пусть $x \in (c-\delta; c) \Rightarrow f(c) - f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{<0}\underbrace{(c-x)}_{>0} < 0$, $\xi \in (x; c)$
$\Rightarrow f(x) > f(c)$.
Если $x \in (c; c+\delta) \Rightarrow f(x) - f(c) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0}\underbrace{(x-c)}_{>0} > 0$, $\xi \in (c; x)$
$\Rightarrow f(x) > f(c)$. Значит, c – точка строгого лок. min.
2) Аналогично.
3) Если f' не меняет знак, то $f(c) - f(x)$ меняет знак $\Rightarrow$ экстремума нет. ч.т.д.

$f(c) - f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{\text{не меняет знак}}\underbrace{(c-x)}_{\text{меняет знак}}$

Т.3 (2-е достаточное усл-е экстремума).
Пусть f диф-ма в окрестности т.с, и пусть $\exists f''(c)$.
Если $f'(c) = 0$, $f''(c) > 0$ (<0), то c – точка строгого локального min (max).

Д-во: Если $\underset{\text{например}}{f''(c) > 0}$, то $f' \uparrow$ в точке c. Значит, $\exists \delta > 0$, т.ч. $f'(x) < f'(c) = 0$ $\forall x \in (c-\delta; c)$ и $f'(x) > f'(c) = 0$ $\forall x \in (c; c+\delta) \Rightarrow c$ – т. min (Т.2) ч.т.д.

Т.4 (3-е достаточное усл-е экстремума).
Пусть f n раз диф-ма в окр-ти точки c, $n \in \mathbb{N}$, n-нечётное; и пусть $\exists f^{(n+1)}(c)$. Если $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n)}(c) = 0$, $f^{(n+1)}(c) > 0$ (<0), то c – точка строгого лок. минимума (максимума).

Д-во: Пусть, например, $f^{(n+1)}(c) > 0$. Тогда $f^{(n)} \uparrow$ в точке c; $f^{(n)}(c) = 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$: $f^{(n)}(x) < 0$ $\forall x \in (c-\delta; c)$, $f^{(n)}(x) > 0$ $\forall x \in (c; c+\delta)$
Пусть $x \in \mathring{B}_\delta(c) \Rightarrow f'(x) = \underbrace{f'(c) + \frac{f''(c)}{1!}(x-c) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}}_{=0} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}\underbrace{(x-c)^{n-1}}_{>0}$, $0 < (n-1)!$, т.к. $n-1$-чётное, ξ - между c и x.